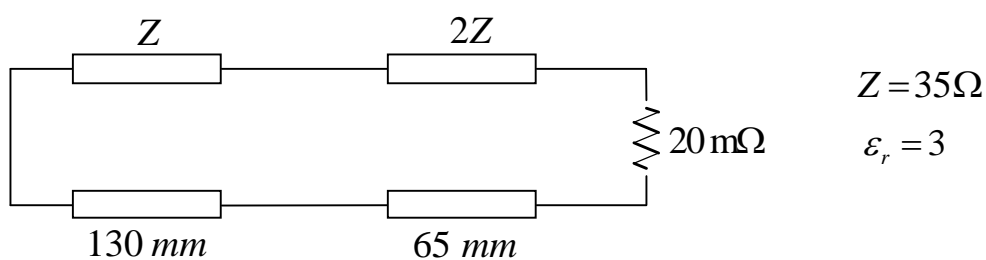


ESERCIZIO 10 - TUTORATO PROPAGAZIONE A.A. 06/07

08-09/05/2007

Esercizio 1 (8 punti / 18)

Prova scritta di propagazione (2° parte) - 10 02 2004



Nel risuonatore di figura tutte le linee sono riempite con un dielettrico di costante dielettrica $3\epsilon_0$.

Determinare la frequenza fondamentale di risonanza e il relativo fattore di merito.

Determinare poi il rapporto tra la prima frequenza di risonanza superiore e quella fondamentale.

SOLUZIONI

$$F_{ris} = 405.15 \text{ MHz}$$

$$Q = 6687$$

$$F_{sup}/F_{ris} = 2.288$$

Soluzione :

Il risuonatore in figura è un risuonatore reale con perdite.

A rigori il calcolo del fattore di merito andrebbe fatto considerando la frequenza complessa.

In realtà, se il fattore di merito è abbastanza grande, è possibile utilizzare la tecnica perturbativa che prevede di calcolare frequenza di risonanza e energia elettromagnetica immagazzinata nel risuonatore di un risuonatore ideale che risulti “vicino” al risuonatore reale di interesse.

Nel caso di un risuonatore composto da un'unica linea di trasmissione, chiuso su di una resistenza $R \ll Z_0$ da un lato (vedi appunti teoria) si è trovato che il suo fattore di merito valeva $Q = \pi Z_0 / 2R$.

In generale si può stimare a priori il fattore di merito del risuonatore in esame, ai fini dell'applicazione della tecnica perturbativa, come rapporto tra l'impedenza caratteristica di linea “minore” e la resistenza di perdita “maggiore” presenti nel risuonatore complessivo.

Nel nostro caso una stima molto grossolana del fattore di merito vale:

$$Q_{stima} = \frac{Z}{R} = \frac{35}{20 \cdot 10^{-3}} = 1750$$

In tal caso possiamo tentare allora applicare la tecnica perturbativa al calcolo di frequenza di risonanza e energia elettromagnetica immagazzinata.

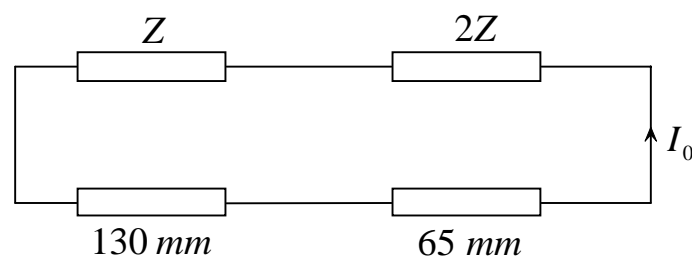
Alla fine dei calcoli, se il fattore di merito risultasse abbastanza grande (non necessariamente uguale a quello stimato, che risulta essere una stima molto grossolana) significa che possiamo accettare i risultati ottenuti con tale tecnica (l'errore commesso è dell'ordine di $1/2Q$, tanto più piccolo quanto più grande è il fattore di merito).

Applicare la tecnica perturbativa al nostro esercizio, significa calcolare frequenza di risonanza e energia elettromagnetica di un risuonatore ideale senza perdite vicino al risuonatore dell'esercizio.

Il risuonatore ideale da considerare è quello reale da cui vengono rimosse tutte le cause di dissipazione di potenza.

Nel nostro circuito l'unica causa di dissipazione è la resistenza da $20\text{ m}\Omega$ ed essendo questa abbastanza piccola, rispetto all'impedenza caratteristica delle linee, la sua migliore approssimazione è un corto circuito.

Il circuito a cui applicare la tecnica perturbativa è allora il seguente:

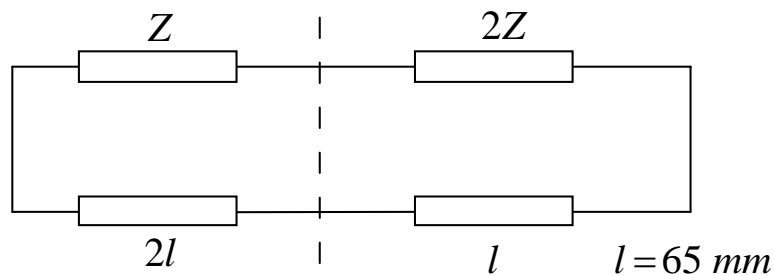


Naturalmente per il calcolo di energia e potenza dissipata occorre “alimentare” il risuonatore, ovvero fissare il valore di una corrente o di una tensione. Questa scelta può essere fatta nel modo più comodo per calcolare le grandezze di interesse, in quanto il fattore di merito risulta completamente indipendente da essa. Nel nostro caso tale scelta è ricaduta sulla corrente del corto circuito di destra, che ha sostituito la resistenza, denominata I_0 .

A) Calcolo della frequenza fondamentale di risonanza.

Scelta una sezione arbitraria del circuito, dobbiamo imporre le due condizioni per avere risonanza, cioè:

$$\tilde{Z} + \vec{Z} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{Y} + \vec{Y} = 0$$



In genere, salvo casi particolari, nelle condizioni in cui le due impedenze o le due ammettenze non vanno contemporaneamente ad infinito ne basta una sola.

Utilizziamo la condizione sulle impedenze:

- a sinistra della sezione vedo una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z e lunga $2l$ (avendo posto $l = 65 \text{ mm}$) chiusa in corto circuito, quindi di impedenza:

$$\tilde{Z} = j \cdot Z \cdot \tan(\beta \cdot 2l)$$

- a destra della sezione vedo una linea di trasmissione di impedenza caratteristica $2Z$ e lunga l chiusa in corto circuito, quindi di impedenza:

$$\vec{Z} = j \cdot 2Z \cdot \tan(\beta \cdot l)$$

Dove β è la costante di propagazione delle due linee (uguale per entrambe avendo stessa costante dielettrica); quest'ultima rappresenta l'incognita del problema essendo legata linearmente alla pulsazione ω incognita.

Alla risonanza la somma di queste due ammettenze deve essere nulla:

$$j \cdot Z \cdot \tan(\beta \cdot 2l) + j \cdot 2Z \cdot \tan(\beta \cdot l) = 0$$

Questa relazione è sufficiente per determinare tutte le frequenze di risonanza del circuito in quanto le due impedenze non vanno mai contemporaneamente all'infinito.

Posto per comodità $T = \tan(\beta \cdot x)$ e usando la formula di duplicazione per la tangente, dobbiamo risolvere:

$$j \cdot Z \cdot \frac{2 \cdot \tan(\beta \cdot l)}{1 - \tan^2(\beta \cdot l)} + j \cdot 2Z \cdot \tan(\beta \cdot l)T = 0$$

$$\frac{2 \cdot T}{1 - T^2} + 2 \cdot T = 0$$

$$(2 - T^2) \cdot T = 0$$

notare che $T^2 = 1$ non è soluzione dell'equazione (quindi la razionalizzazione dell'equazione non elimina soluzioni possibili).

La soluzione per T vale allora:

$$T = 0 \quad T_1 = 0 \quad \text{e} \quad T^2 = 2 \quad T_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

di conseguenza

$$\beta \cdot l = \begin{cases} 0 + n\pi \\ \arctan(\sqrt{2}) + n'\pi \\ \arctan(-\sqrt{2}) + n''\pi \end{cases}$$

$$\beta \cdot l = \begin{cases} 0 + n\pi|_{n=1} = \pi & (180^\circ) \\ \arctan(\sqrt{2}) + n'\pi|_{n'=0} = 0.9553 & (54.73^\circ) \\ \arctan(-\sqrt{2}) + n''\pi|_{n''=1} = 2.1863 & (125.26^\circ) \end{cases} \quad \beta \cdot l = \begin{cases} 0 + n\pi|_{n=2} = 2\pi & (360^\circ) \\ \arctan(\sqrt{2}) + n'\pi|_{n'=1} = 4.0969 & (234.73^\circ) \\ \arctan(-\sqrt{2}) + n''\pi|_{n''=2} = 5.3279 & (305.26^\circ) \end{cases}$$

quindi

$$\beta = \begin{cases} \frac{\pi}{1} = 48.33 \text{ m}^{-1} \\ \frac{0.9553}{1} = 14.69 \text{ m}^{-1} \\ \frac{2.1863}{1} = 33.63 \text{ m}^{-1} \end{cases} \quad \omega = \beta \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \begin{cases} 48.33 \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 8.3714 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ 14.69 \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 2.5456 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ 33.63 \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 5.8257 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \begin{cases} \frac{8.3714 \cdot 10^9}{2\pi} = 1.33 \text{ GHz} \\ \frac{2.5456 \cdot 10^9}{2\pi} = 405.149 \text{ MHz} \\ \frac{5.8257 \cdot 10^9}{2\pi} = 927.198 \text{ MHz} \end{cases}$$

La frequenza fondamentale di risonanza vale dunque

$$f_{ris} = 405.149 \text{ MHz}$$

mentre la prima frequenza superiore vale

$$f_{1\text{sup}} = 927.198 \text{ MHz}$$

Il loro rapporto vale dunque:

$$\frac{f_{1\text{sup}}}{f_{ris}} = \frac{927.198}{405.149} = 2.288$$

B) Calcolo dell'energia elettromagnetica.

Poiché alla risonanza l'energia elettrica totale è uguale all'energia magnetica totale immagazzinata nel circuito, cioè

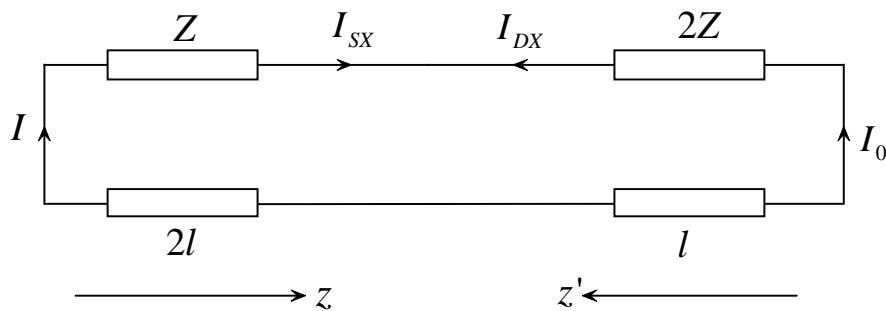
$$W_e = W_m$$

Allora l'energia elettromagnetica totale si può calcolare come:

$$W_{em} = 2 \cdot W_e = 2 \cdot W_m$$

Alla risonanza è allora sufficiente calcolare un solo tipo di energia, elettrica o magnetica, per avere tutta l'energia elettromagnetica immagazzinata nel circuito complessivo.

I calcoli successivi faranno riferimento alla figura illustrata di seguito:



Supponiamo di voler calcolare l'energia magnetica del circuito; per una generica linea di lunghezza d e di induttanza, per unità di lunghezza, pari a L , questa si calcola come:

$$W_m = \frac{1}{4} \cdot \int_0^d L \cdot |I(z)|^2 dz$$

Nel nostro caso, le due linee in cui calcolare l'energia magnetica hanno differente lunghezza e differente induttanze per unità di lunghezza che valgono:

$$L_1 = \frac{Z \cdot \beta}{\omega} = 202.07 \frac{nH}{m}$$

$$L_2 = \frac{(2Z) \cdot \beta}{\omega} = 2 \cdot L_1 = 404.14 \frac{nH}{m}$$

L'andamento della corrente sulla linea di sinistra e secondo il sistema di riferimento in figura vale:

$$I_1(z) = I \cdot \cos(\beta \cdot z)$$

mentre l'andamento della corrente sulla linea di destra, sempre secondo il sistema di riferimento in figura vale:

$$I_2(z') = I_0 \cdot \cos(\beta \cdot z')$$

Poiché l'energia sarà calcolata in riferimento ad un unico parametro circuitale, nel nostro caso è stata scelta la corrente sul corto circuito di destra (I_0), è utile riferire tutte le grandezze circuitali a tale parametro; in particolare si può legare il valore della corrente I , sul corto circuito a sinistra, alla corrente I_0 , sul cortocircuito a destra, sfruttando il fatto che la tensione in uscita dalle due linee è la stessa oppure che le due correnti in uscita sono opposte:

- per la linea di sinistra vale: $I_{SX} = I_1(2l) = I \cdot \cos(\beta \cdot 2l)$
- per la linea di destra vale: $I_{DX} = I_2(l) = I_0 \cdot \cos(\beta \cdot l)$

conseguenza:

$$I \cdot \cos(\beta \cdot 2l) = -I_0 \cdot \cos(\beta \cdot l)$$

$$I = -I_0 \cdot \frac{\cos(\beta \cdot l)}{\cos(\beta \cdot 2l)} = \alpha \cdot I_0$$

dove è stato posto

$$\alpha = -\frac{\cos(\beta \cdot l)}{\cos(\beta \cdot 2l)} = \sqrt{3}$$

In questo modo anche la corrente $I_1(z)$ è esprimibile in funzione di I_0 :

$$I_1(z) = \alpha \cdot I_0 \cdot \cos(\beta \cdot z)$$

Noti gli andamenti delle correnti lungo le linee, siamo in grado di calcolare l'energia magnetica.

Nella linea a sinistra abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{m1} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2l} L_1 \cdot |I_1(z)|^2 dz = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2l} L_1 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z) dz = \\ &= \frac{1}{4} \cdot L_1 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^{2l} \frac{1 + \cos(2 \cdot \beta \cdot z)}{2} dz = \frac{1}{4} \cdot L_1 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[\frac{z}{2} \Big|_0^{2l} + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z)}{4 \cdot \beta} \Big|_0^{2l} \right] dz = \\ &= \frac{1}{4} \cdot L_1 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[l + \frac{\sin(4 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 202.07 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot |I_0|^2 \cdot 54.31 \cdot 10^{-3} = \left(8.23 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2 \end{aligned}$$

Nella linea a destra viceversa:

$$\begin{aligned}
 W_{m2} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^l L_2 \cdot |I_1(z')|^2 dz' = \frac{1}{4} \cdot \int_0^l L_2 \cdot |I_0|^2 \cdot \cos^2(\beta \cdot z') \cdot dz' = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot L_2 \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^l \frac{1 + \cos(2 \cdot \beta \cdot z')}{2} \cdot dz' = \frac{1}{4} \cdot L_2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[\frac{z'}{2} \Big|_0^l + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z')}{4 \cdot \beta} \Big|_0^l \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot L_2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[\frac{l}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 404.14 \cdot 10^{-9} \cdot |I_0|^2 \cdot 48.54 \cdot 10^{-3} = \left(4.9 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
 \end{aligned}$$

L'energia magnetica totale vale dunque:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \left(8.23 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2 + \left(4.9 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2 = \left(13.13 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2$$

Mentre l'energia elettromagnetica totale vale:

$$W_{em} = 2 \cdot W_m = 2 \cdot \left(13.13 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2 = \left(26.26 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2$$

Il calcolo dell'energia elettromagnetica sarebbe così concluso ma, a fini didattici, è utile calcolare anche l'energia elettrica immagazzinata nel circuito e verificare che sia uguale, come deve essere in condizioni di risonanza, a quella magnetica.

Supponiamo di voler calcolare l'energia elettrica del circuito; per una generica linea di lunghezza d e di capacità per unità di lunghezza pari a C , questa si calcola come:

$$W_e = \frac{1}{4} \cdot \int_0^d C \cdot |V(z)|^2 dz$$

Nel nostro caso, le due linee in cui calcolare l'energia elettrica hanno differente lunghezza e differente capacità per unità di lunghezza che valgono:

$$C_1 = \frac{\beta}{\omega \cdot Z} = 164.96 \frac{pF}{m}$$

$$C_2 = \frac{\beta}{\omega \cdot 2Z} = \frac{C_1}{2} = 82.48 \frac{pF}{m}$$

Analogamente a quanto già fatto per le correnti, l'andamento della tensione sulla linea di sinistra può scriversi come:

$$V_1(z) = -j \cdot Z \cdot I \cdot \sin(\beta \cdot z) = -j \cdot Z \cdot \alpha \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot z)$$

mentre quello della tensione sulla linea di destra vale:

$$V_2(z') = -j \cdot 2Z \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot z')$$

Noti gli andamenti delle tensioni lungo le linee, siamo in grado di calcolare l'energia elettrica.

Nella linea a sinistra abbiamo:

$$\begin{aligned}
 W_{e1} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2l} C_1 \cdot |V_1(z)|^2 dz = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2l} C_1 \cdot Z^2 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z) dz = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot C_1 \cdot Z^2 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^{2l} \frac{1 - \cos(2 \cdot \beta \cdot z)}{2} dz = \frac{1}{4} \cdot C_1 \cdot Z^2 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[\frac{z}{2} \Big|_0^{2l} - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z)}{4 \cdot \beta} \Big|_0^{2l} \right] \cdot dz = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot C_1 \cdot Z^2 \cdot |\alpha|^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[l - \frac{\sin(4 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 164.96 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot |I_0|^2 \cdot 75.69 \cdot 10^{-3} = \left(11.47 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
 \end{aligned}$$

Nella linea a destra viceversa:

$$\begin{aligned}
 W_{e2} &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^l C_1 \cdot |V_1(z')|^2 dz' = \frac{1}{4} \cdot \int_0^l C_2 \cdot 4 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \sin^2(\beta \cdot z') dz' = \\
 &= C_2 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \int_0^l \frac{1 - \cos(2 \cdot \beta \cdot z')}{2} dz' = C_2 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[\frac{z'}{2} \Big|_0^l - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot z')}{4 \cdot \beta} \Big|_0^l \right] = \\
 &= C_2 \cdot Z^2 \cdot |I_0|^2 \cdot \left[\frac{l}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \beta \cdot l)}{4 \cdot \beta} \right] = 82.48 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot |I_0|^2 \cdot 16.46 \cdot 10^{-3} = \left(1.66 \cdot \frac{nJ}{A^2} \right) \cdot |I_0|^2
 \end{aligned}$$

L'energia elettrica totale vale dunque:

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} = \left(11.47 \cdot \frac{nJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2 + \left(1.66 \cdot \frac{nJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2 = \left(13.13 \cdot \frac{nJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2$$

che come si vede coincide con quella magnetica.

Mentre l'energia elettromagnetica totale si può calcolare anche come:

$$W_{em} = 2 \cdot W_e = 2 \cdot \left(13.13 \cdot \frac{nJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2 = \left(26.26 \cdot \frac{nJ}{A^2}\right) \cdot |I_0|^2$$

C) Calcolo della Potenza dissipata e del Fattore di Merito.

Ricordando ora che il fattore di merito si calcola come

$$Q = \frac{\omega \cdot W_{em}}{P_D}$$

rimane da calcolare la potenza dissipata nel risuonatore che è evidentemente la potenza dissipata dall'unica resistenza presente nel circuito.

Anche per quanto riguarda il calcolo della potenza dissipata, occorre assumere la stessa configurazione di campo, cioè di tensione e corrente, del risuonatore ideale, e quindi nella resistenza R scorrerà una corrente uguale a I_0 .

Attenzione che nel calcolo della potenza dissipata con la tecnica perturbativa, non tutte le grandezze possono essere considerate uguali a quelle del caso ideale.

Se consideriamo infatti la tensione ai capi della resistenza R , questa tensione è nulla nel caso ideale, e quindi se venisse utilizzata per calcolare la potenza dissipata, troveremo potenza dissipata nulla, il che è palesemente assurdo.

Il punto è che possiamo considerare uguali nel risuonatore ideale e in quello reale tutte le grandezze che nel risuonatore ideale sono diverse da zero. Infatti in tal caso l'errore relativo fatto nel considerarle uguali è molto piccolo. Se invece prendiamo una grandezza nulla nel risuonatore ideale, ma diversa da zero in quello reale, il supporle uguali porta a un errore relativo infinito.

La tensione ai capi della resistenza nel risuonatore ideale può essere calcolata a partire dalla corrente attraverso la resistenza (che è uguale nella risuonatore ideale ed in quello reale, e vale I_0) come $V_R = R \cdot I_0$.

Pertanto, nel nostro caso la potenza dissipata nella resistenza vale:

$$P_D = \frac{1}{2} \cdot R \cdot |I_0|^2 = 10 \frac{mW}{A^2} \cdot |I_0|^2$$

Di conseguenza è ora possibile calcolare finalmente il fattore di merito come:

$$Q = \frac{\omega \cdot W_{em}}{P_D} = \frac{2.5456 \cdot 10^9 \frac{1}{s} \cdot 26.26 \cdot 10^{-9} \frac{J}{A^2} \cdot |I_0|^2}{10 \cdot 10^{-3} \frac{W}{A^2} \cdot |I_0|^2} = 6687$$

A questo punto, considerato che il fattore di merito ottenuto con la tecnica perturbativa è effettivamente grande, significa che i risultati ottenuti sono corretti.

L'errore commesso è dell'ordine di $\frac{1}{2Q} = 7.5 \cdot 10^{-5}$.